التوزيعات الاحتمالية المتصلة

التوزيع الطبيعي : Normal distribution

إذا كان X . م . ع متصل له توزيع طبيعي مداهُ
$+\infty < X < \infty$ بمعلمتين σ^2 ، μ فإن دالة كثافة الإحتمال له
هي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

وتكتب بصيغة أخرى كما يلي ..

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

حيث :

1. $+\infty < x < \infty-$
2. $+\infty < \mu < \infty-$
3. $\sigma^2 > 0$
4. 3.14 أو $\pi = \frac{22}{7}$
5. $e = 2.7183$

خواص التوزيع الطبيعي :

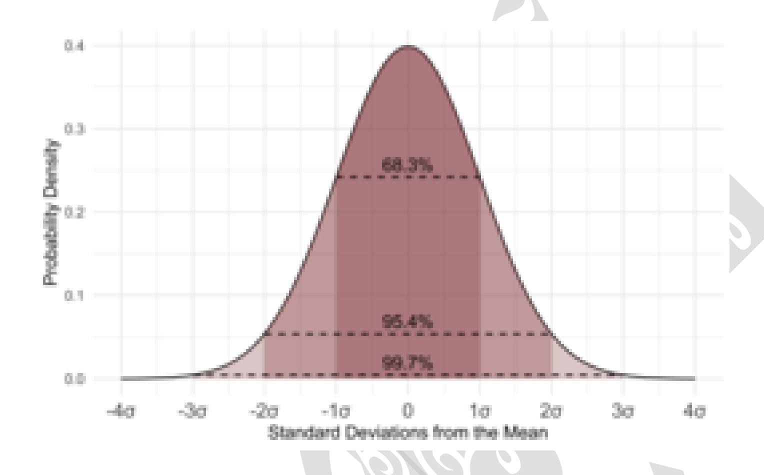
1. التوزيع الطبيعي متماثل حول الوسط الحسابي μ .
2. منحنى التوزيع له قمة واحدة وبالتالي له منوال واحد .
3. مقاييس النزعة المركزية متساوية أي ان :
الوسط الحسابي = الوسيط =المنوال

④ منحنى التوزيع الطبيعي يأخذ الشكل الناقوسي أو الجرس ويمتد طرفاه الى مالا نهاية دون أن يلامسا المحور الأفقي .

⑤ منحنى التوزيع الطبيعي معامل الإلتواء له يساوي صفر ، بينما المعامل العزمي للتفرطح له يساوي 3 .

⑥ يتحدد بمعلمتين هما الوسط الحسابي (μ) وتباين (σ^2) .

⑦ المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي واحد صحيح



التوزيع الطبيعي المعياري :

هو توزيع معتدل له متوسط $\mu = 0$ ، وانحراف معياري له يساوي $\sigma = 1$.

دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-1}{2} * z^2}$$

حيث ... $-\infty < z < \infty +$

تقريب (تحويل) التوزيع الطبيعي لــــ المعياري ...

لتحويل المتغير العشوائي الطبيعي X إلى المتغير العشوائي الطبيعي المعياري Z يجب أن نطرح منه الوسط الحسابي μ_x ونقسمه على انحرافه المعياري σ_x

أي إن .. $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0 ، 1)$

ومن ثم نستخدم جداول التوزيـع الطبيعي المعياري والذي يُعطى المساحة الخاصة بالاحتمال :

$$P(Z) = P(0 \leq Z \leq a)$$

① $P(0 \leq Z \leq a)$ بحث مباشرة من الجدول

② $P(Z \leq a) = P(Z \geq -a) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq a)$

③ $P(Z \geq a) = P(Z \leq -a) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq a)$

④ $P(a \leq Z \leq b) = P(0 \leq Z \leq b) - P(0 \leq Z \leq a)$

⑤ $P(-a \leq Z \leq b) = P(0 \leq Z \leq a) - P(0 \leq Z \leq b)$

⑥ $P(-a \leq Z \leq -b) = P(0 \leq Z \leq a) + P(0 \leq Z \leq b)$

⑦ $P(-a \leq Z \leq a) = 2 * P(0 \leq Z \leq a)$

⑧ $P(Z \geq 0) = P(Z \leq 0) = 0.5$

⑨ $P(Z = a) = 0$ لعدم وجود مساحة

⑩ $P(-a \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq a)$ بالتماثل

ملاحظات هامة :

① إشارة المساواة في المتباينة لا تؤثر على قيمة الإحتمال أي أن :

$$P(Z > a) = P(Z \geq a)$$

② نسب مميزة للمساحات الواقعة بين σ ، μ :

- المساحة الواقعة بين $\mu \pm \sigma$:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$$

- المساحة الواقعة بين $\mu \pm 2\sigma$:

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

- المساحة الواقعة بين $\mu \pm 3\sigma$:

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$$

استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الاحتمالات المطلوبة .....

① فتح نظام الإحصاء .... $\boxed{3}$ → Moode

② لفتح الأيقونة الخاصة بتوزيع Z نقوم بالاتي :

$\boxed{5} \rightarrow shift \rightarrow \boxed{AC}$ ثم نختار الرقم المناسب حسب الاحتمال المطلوب

$2: Q($	$1: P($
$4: \blacktriangleright t$	$3: R($

1 : تعني من اليسار أي $\leq \pm a$

3 : تعني من اليمين أي $\geq \pm a$

2: تعني الصورة العامة

كذلك نستخدم الأيقونة $\boxed{2}$ مرتين ثم نجمع أو نطرح

مثال ① : إذا علمت ان المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فاحسب ما يلي :

❶ $P(Z < -1)$

❷ $P(Z \geq -2)$

❸ $P(Z \leq 1.5)$

❹ $P(Z \geq 1.5)$

❺ $P(-1.45 \leq Z \leq 1.13)$

❻ $P(Z = 1.32)$

❼ $P(-0.90 \leq Z \leq 0.90)$

❽ $P(-0.43 \leq Z \leq 0)$

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال ② : إذا علمت ان المساحة من 0 إلى 1.32 = 0.4066 وذلك من خلال جدول Z فأوجد $P(Z \leq 1.32)$ ؟

الحل :

....

....

مثال ③ **:** إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيـع الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي 6 وتباين يساوي 100 فاوجد القيمة المعيارية Z المقابلة للقيمة $x = 6$.؟

الحل :

....

....

مثال ④ **:** إذا كان اطوال طلبة المرحلة الثانوية تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 165 سم ، وتباين 9 سم^2 ، إذا اخترنا من طلبة هذه المرحلة طالباً واحداً عشوائياً فاحسب ما يلي :.

1. احتمال أن يكون طوله يتراوح بين 163 سم ، 168 سم .؟
2. احتمال أن يكون طوله أقل من 162 سم .؟
3. احتمال أن يكون طوله أكثر من 170 سم .؟

الحل :

....

....

....

....

....

مثال ⑤ **:** إذا كان درجات الطلبة في امتحان مادة الإحصاء تتبع التوزيـع الطبيعي بمتوسط μ وتباين μ^2 حيث $\mu > 0$ فأوجد $P(X \geq 2\mu)$.؟



....

....

....

....

مثال ⑥ **:** إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيـع الطبيعي
بمتوسط 25 وتباين σ^2 بحيث : $P(X \geq 30) = 0.9222$
فأوجد قيمة σ .؟

الحل :

....

....

....

....

....

مثال ⑦ **:** إذا كان $P(-0.43 \leq Z \leq 2.65) = 0.6624$
وكان $P(-2.65 \leq Z \leq 0) = 0.4960$ فاوجد قيمة
$P(0 \leq Z \leq 0.43)$.؟

الحل :

....

....

....

....

....

مثال ⑧ : إذا كان $X \sim N(25 ، 16)$ وكان
$P(X < b) = 0.8023$ فأوجد قيمة b .؟

الحل :

....

....

....

....

....

مثال ⑨ : في التوزيع الطبيعي المعياري إذا كانت المساحة على يمين القيمة 1.96 تساوي 0.025 والمساحة على يسار القيمة 1.96 – تساوي 0.025 فأوجد المساحة بين القيمتين .؟

الحل :

....

....

....

مثال ⑩ : إذا كان Z متغيراً عشوائياً له التوزيـع الطبيعي وكان :
$P(Z \leq 1) = 0.8413$ ، $P(Z > -1.96) = 0.975$ فأوجد
$P(Z \leq 0)$.؟

الحل :

....

....

مثال ⑪ أوجد ❶ قيمة σ^2 في التوزيع الطبيعي التالي :

❷ القيم التي يأخذها المتغير العشوائي

المستمر X حيث X يتبع التوزيع الطبيعي .؟

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} * e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-3}{5}\right)^2}$$

الحل :

....

....

....

....

استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة الاحتمال من التوزيع الطبيعي المعياري Z :

- **طريقة إيجاد الاحتمال بالآلة الحاسبة تختلف عن طريقة الكشف في جدول Z المتبعة في الكتاب المدرسي حيث توجد بالآلة ثلاث خيارات وهي كالتالي :**

استخدام الة Casio f_x : 991 ES plus

خطوة ① فتح نظام الإحصاء

$\boxed{mode} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{AC} \rightarrow \boxed{shift} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{5}$

خطوة ② نختار الرقم حسب المطلوب

$$\begin{cases} 1 & : P(\quad \text{ويقصد بها (أقل من)} \\ 2 & : Q(\quad \text{ويقصد المساحة من (العدد المطلوب) إلى الصفر} \\ 3 & : R(\quad \text{ويقصد بها(أكبر من)} \end{cases}$$

ملاحظة...... يوجد خيار $4: \blacktriangleright t$ وهو خاص بتوزيع t
والتالي هو خارج المقرر (أي ملغي) .

مثال ⑫ : أوجد الاحتمالات الآتية باستخدام الآلة الحاسبة .؟

① $P(Z \leq 1.43)$

② $P(Z \geq 1.28)$

③ $P(0 \leq Z \leq 0.90)$

④ $P(-1.12 \leq Z \leq -0.57)$

الحل :

....

....

....

....

....

انتهى الدرس